ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN PHÂN THỨC TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHOẢNG Ở HÀM MỤC TIÊU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HẰNG

THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN PHÂN THỨC TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHOẢNG Ở HÀM MỤC TIÊU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TS. Trần Vũ Thiệu

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Danh mục các hình vẽ

Lời mở đầu

Qui hoạch phân tuyến tính (LFP) là bài toán tìm cực tiểu (hay cực đại) của một hàm phân thức afin (tỉ số hai hàm tuyến tính afin) với các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính.

Qui hoạch phân tuyến tính là một trường hợp riêng của qui hoạch phân thức phi tuyến, thường dùng để mô hình hóa các bài toán thực tế với một hay nhiều mục tiêu (chẳng hạn lợi nhuận / chi phí, sản phẩm / số lao động, ...) và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành khác nhau của kỹ thuật, kinh tế, tài chính, ...

Một trong những bài toán qui hoạch phân thức tuyến tính đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu là bài toán phân thức tuyến tính với hệ số khoảng ở hàm mục tiêu (không cố định như trước). Bài toán này có dạng:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{[a_1,b_1]x_1 + \ldots + [a_n,b_n]x_n + [a_0,b_0]}{[c_1,d_1]x_1 + \ldots + [c_n,d_n]x_n + [c_0,d_0]} \to \min$$

với điều kiện $Ax < b$, $x \geq 0$, $(A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m)$.

Mô hình bài toán này linh hoạt và dễ áp dụng hơn. Có một số tài liệu mới ([4], [5] và [6] năm 2012, 2013) đề cập tới các phương pháp giải bài toán này. Đáng chú ý là hai phương pháp nêu ở [4] và [6].

Vì thế chúng tôi chọn đề tài luận văn:

"Thuật toán giải bài toán phân thức tuyến tính với hệ số khoảng ở hàm mục tiêu"

nhằm mục đích tìm hiểu và trình bày các ý tưởng, phương pháp và thuật toán giải mô hình bài toán nêu trong hai tài liệu tham khảo gần đây [4, 6]. Cả hai phương pháp tuy khác nhau, nhưng đều mở rộng và phát triển thuật toán giải qui hoạch phân tuyến tính đã có. Vì thế trước hết cần tìm hiểu qua về bài toán qui hoạch phân tuyến tính và một số tính chất nghiệm tối ưu của bài toán phân tuyến tính. Sau đó sẽ tìm hiểu và trình bày từng cách tiếp cận riêng ở [4] và [6].

Về đại thể phương pháp [4] nêu cách đưa bài toán ban đầu về một qui hoạch tuyến tính, phương pháp [6] dựa trên phép tính khoảng tìm cách đưa bài toán được xét về bài toán với hàm mục tiêu khoảng. Đây là đề tài mới về qui hoạch phân tuyến tính, đang được nhiều người quan tâm tìm hiểu, nghiên cứu.

Luận văn được viết dựa chủ yếu trên các tài liệu tham khảo [1] - [6].

Kết quả cần đạt được: hiểu và trình bày về bài toán qui hoạch phân tuyến tính, tính chất nghiệm tối ưu của bài toán, mô hình bài toán qui hoạch phân tuyến tính với hệ số khoảng ở hàm mục tiêu và một số thuật toán xử lý mô hình. Đóng góp chính của luận văn là tổng hợp và giới thiệu có chọn lọc hai thuật toán giải bài toán qui hoạch phân tuyến tính với hệ số khoảng ở hàm mục tiêu.

Luận văn được viết trong hai chương.

Chương 1 **"Kiến thức chuẩn bị"** đề cập tới bài toán tối ưu với hàm mục tiêu phân tuyến tính và với các ràng buộc tuyến tính. Nêu một số ví dụ thực tế có mô hình toán học là qui hoạch phân tuyến tính (bài toán sản xuất) và qui hoạch phân tuyến tính suy rộng (bài toán tăng trưởng kinh tế Von Neumann và bài toán phân bổ tối ưu công suất phát sóng). Tiếp đó nêu các tính chất nghiệm của bài toán thông qua các minh họa hình học nghiệm tối ưu của bài toán qui hoạch phân tuyến tính. Cuối chương trình bày phép biến đổi Charnes - Cooper đưa bài toán qui hoạch phân tuyến tính về bài toán qui hoạch tuyến tính tương đương, mà không cần giả thiết tập ràng buộc của bài toán phân tuyến tính bị chặn.

Chương 2 **"Qui hoạch phân tuyến tính với hệ số khoảng ở hàm mục tiêu"** giới thiệu cách tiếp cận đưa ra trong [4, 6] tìm nghiệm tối ưu cho bài toán qui hoạch phân tuyến tính với các hệ số mục tiêu thay đổi trong một khoảng. Thuật toán giải [4] dùng phép biến đổi Charnes - Cooper và thuật toán giải [6] dựa trên phép tính khoảng. Cuối chương nêu một số ví dụ minh hoạ cho các thuật toán giải đã trình bày.

Nhân dịp này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn GS.TS. Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS của Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên và của Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Học viên

Nguyễn Thu Hằng

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này đề cập tới bài toán tối ưu với hàm mục tiêu phân tuyến tính (tỉ số của hai hàm tuyến tính afin) và với các ràng buộc tuyến tính. Các bài toán như thế gọi là *qui hoạch phân tuyến tính*. Phần đầu trình bày nội dung và ý nghĩa bài toán, tiếp đó nêu tính chất và minh họa hình học nghiệm tối ưu của bài toán. Cuối chương giới thiệu cách đưa bài toán về qui hoạch tuyến tính tương đương. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1. Bài toán qui hoạch phân tuyến tính

Một cách tổng quát có thể phát biểu bài toán như sau. Cho tập lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n$ và các hàm $f, g, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (i = 1, \dots, m)$. Xét bài toán tối ưu với hàm mục tiêu phân thức (tỉ số của hai hàm số), ký hiệu bài toán (FP):

(FP) $$\inf_{x \in X} \frac{f(x)}{g(x)},$$

trong đó $X = x \in C : h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$. Ta phân biệt các loại bài toán sau:

- Khi f, g và h_i là các hàm afin thì (FP) gọi là bài toán *qui hoạch phân tuyến tính* (Linear Fractional Program).
- Khi f và g là các hàm toàn phương và h_i là các hàm afin thì (FP) gọi là bài toán *qui hoạch phân thức toàn phương* (Quadratic Fractional Program).

- Khi $f \geq 0$ là hàm lồi, $g > 0$ là hàm lõm và h_i là các hàm lồi thì (FP) gọi là bài toán qui hoạch phân thức lồi (Convex Fractional Program).

Trong bài toán (FP) chỉ xét một hàm phân thức. Tuy nhiên, trong nhiều ứng dụng ta còn có thể xét nhiều hàm phân thức. Chẳng hạn,

- Qui hoạch phân thức suy rộng (Generalized Fractional Program):

$$\lambda^* = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \right\} (g_i > 0 \ \forall i).$$

- Qui hoạch tổng các hàm phân thức (Sum-of-ratios Program):

$$\lambda^* = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \right\} (g_i > 0 \ \forall i).$$

- Qui hoạch phân thức đa mục tiêu (Multi-Objective Fractional Program):

$$\lambda^* = \min_{x \in X} \left\{ \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \ldots, \frac{f_k(x)}{g_k(x)} \right\} (g_i > 0 \ \forall i).$$

Luận văn này chủ yếu tập trung xét bài toán qui hoạch phân tuyến tính:

$$\text{(LFP)} \qquad \min f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta} : Ax \leq b, x \geq 0, \tag{1.1}$$

trong đó p, $q \in \mathbb{R}^n$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ký hiệu

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, x \geq 0\}.$$

Tương tự, có thể xét bài toán tìm cực đại: $\max\{f(x) : x \in X\}$.

Khi cần ta có thể dùng qui ước $a/0 = +\infty$ nếu $a > 0$ và $a/0 = -\infty$ nếu $a \leq 0$.

Qui hoạch tuyến tính là một trường hợp riêng của qui hoạch phân tuyến tính khi $q = 0$ và $\beta = 1$. Trong [2] phân tích một số trường hợp riêng khác cho phép đưa bài toán qui hoạch phân tuyến tính về bài toán tuyến tính thích hợp.